جبر الخارج :

تمهيدية: ليكن A جبراً فوق R ولتكن B مثالية في A .

لنعرف على A العلاقة ρ بالشكل التالي : $\forall x, y \in A \; ; \; x \rho y \Leftrightarrow x - y \in B$

إن ρ علاقة تكافؤ على A ولأجل كل عنصر $x \in A$ فإن صف التكافؤ المولد بالعنصر x هو $\bar{x} = x + B$ ومجموعة صفوف التكافؤ سنرمز لها بالشكل $A/_B = \{\bar{x} = x + B \; ; \; x \in A\}$

البرهان: لنثبت أن ρ علاقة تكافؤ :

① انعكاسية : $\forall x \in A \rightarrow x - x = 0 \in B$

② متعدية : $\forall x, y, z \in A \rightarrow x \rho y \,\&\, y \rho z \overset{?}{\Rightarrow} x \rho z$

$$\left.\begin{aligned} x \rho y &\rightarrow x - y \in B \\ y \rho z &\rightarrow y - z \in B \end{aligned}\right\} \Rightarrow x - z \in B$$

③ تناظرية : $\forall x, y \in A \; ; \; x \rho y \overset{?}{\Rightarrow} y \rho x$

$x \rho y \rightarrow x - y \in B \quad , \quad -(x - y) \in B \rightarrow y - x \in B \rightarrow y \rho x$

ليكن $x \in A$ عندئذٍ : $\bar{x} = \{y \; ; \; y \in B \; ; \; x \rho y\}$

$y \in \bar{x} \; ; \; x \rho y \rightarrow x - y \in B \Rightarrow \exists b \in B \; ; \; x - y = b$

$\rightarrow y = x - b \in x + B \rightarrow \bar{x} \subseteq x + B$

$\forall z \in x + B \; ; \; z = x + k \; ; \; k \in B \Rightarrow z - x = k \in B \Rightarrow x \rho z$

$\Rightarrow z \in \bar{x} \rightarrow x + B \subseteq \bar{x} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = x + B}$

مبرهنة: ليكن A جبراً فوق الحلقة R ولتكن B مثالية في A .

لنعرف على المجموعة $A/_B = \{\bar{x} = x + B \; ; \; x \in A\}$ العمليات التالية $\forall x + B, y + B \in A/_B$ و $\forall \lambda \in R$ فإن :

① $(x + B) + (y + B) = (x + y) + B$

② $\lambda (x + B) = \lambda x + B$

③ $(x + B) . (y + B) = x . y + B$

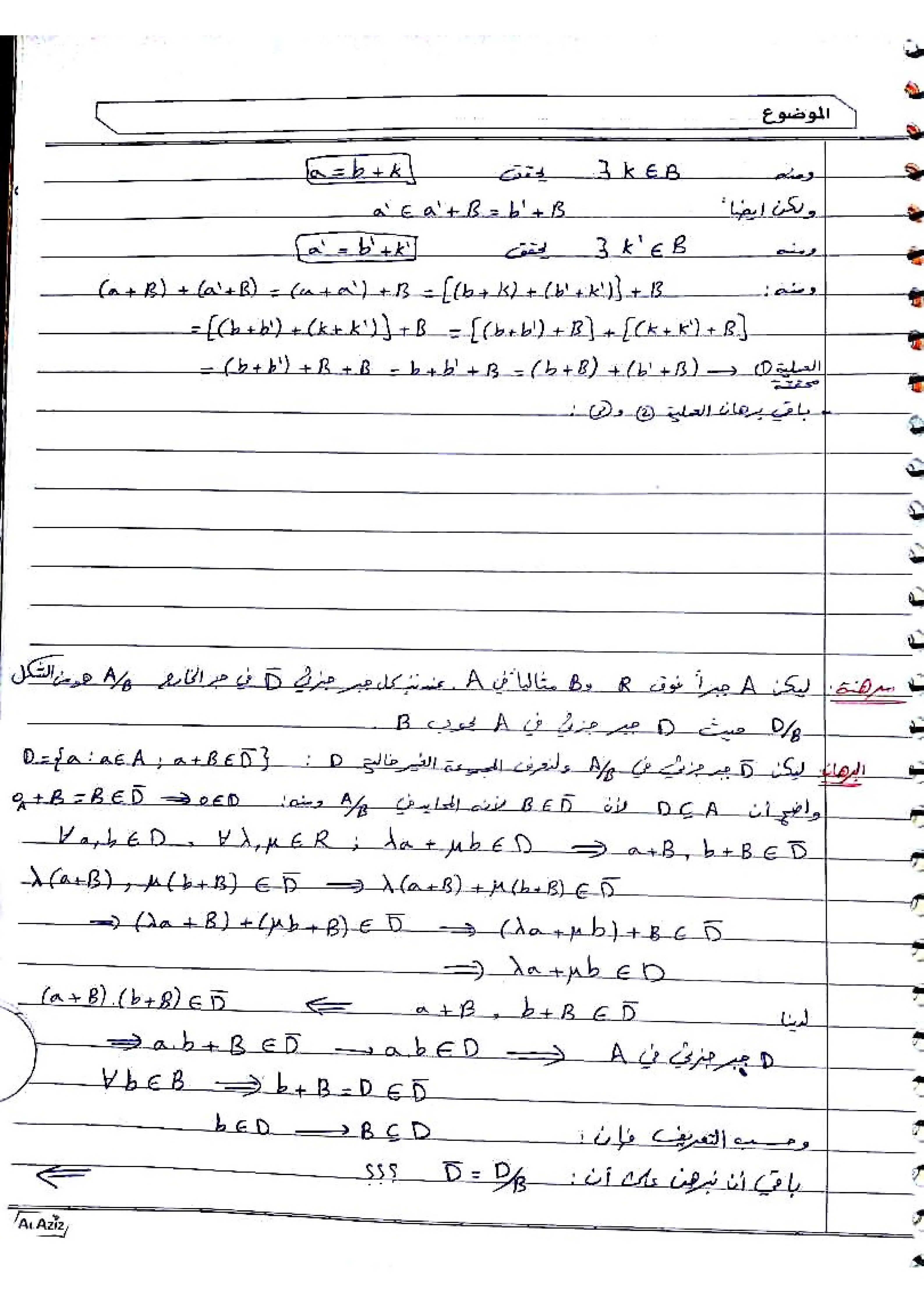
إن المجموعة $A/_B$ مع العمليات السابقة تشكل جبراً فوق R يسمى جبراً خارجاً وفق B .

البرهان: لنبرهن أولاً أن العمليات السابقة معرفة جيداً :

$\forall a + B, a' + B, b + B, b' + B \in A/_B \; ; \; a + B = b + B \; , \; a' + B = b' + B$

لنبرهن على أن : $(a + B) + (a' + B) = (b + B) + (b' + B)$

ولكن $a \in a + B = b + B$



الموضوع

ومنه $\exists k \in B$ يحقق $\boxed{a = b + k}$

ولكن ايضاً: $a' \in a' + B = b' + B$

ومنه $\exists k' \in B$ يحقق $\boxed{a' = b' + k'}$

ومنه: $(a+B) + (a'+B) = (a+a') + B = [(b+k) + (b'+k')] + B$

$= [(b+b') + (k+k')] + B = [(b+b') + B] + [(k+k') + B]$

$= (b+b') + B + B = b + b' + B = (b+B) + (b'+B) \longrightarrow$ العملية ① محققة

- باقي برهان العملية ② و ③ :

مبرهنة: ليكن A جبراً فوق R و B مثالياً في A. عندئذٍ كل جبر جزئي $\overline{D}$ في جبر الخارج A/B هو من الشكل D/B حيث D جبر جزئي في A يحوي B.

البرهان: ليكن $\overline{D}$ جبر جزئي من A/B ولنعرف المجموعة الغير خالية D : $D = \{a : a \in A ; a + B \in \overline{D}\}$

واضح أن $D \subseteq A$ لأن $B \in \overline{D}$ لأنه المحايد في A/B ومنه: $0_A + B = B \in \overline{D} \Rightarrow 0 \in D$

$\forall a, b \in D , \forall \lambda, \mu \in R ; \lambda a + \mu b \in D \Rightarrow a+B , b+B \in \overline{D}$

$\lambda(a+B) , \mu(b+B) \in \overline{D} \Longrightarrow \lambda(a+B) + \mu(b+B) \in \overline{D}$

$\Longrightarrow (\lambda a + B) + (\mu b + B) \in \overline{D} \Longrightarrow (\lambda a + \mu b) + B \in \overline{D}$

$\Longrightarrow \lambda a + \mu b \in D$

لدينا $a+B , b+B \in \overline{D} \Longleftarrow (a+B).(b+B) \in \overline{D}$

$\Rightarrow a.b + B \in \overline{D} \longrightarrow a.b \in D \Longrightarrow$ D جبر جزئي في A

$\forall b \in B \Longrightarrow b + B = D \in \overline{D}$

وحسب التعريف فإن: $b \in D \longrightarrow B \subseteq D$

باقي أن نبرهن على أن: $\overline{D} = D/B$ ؟؟؟ $\Longleftarrow$

Al.Aziz

الموضوع

لدينا $B \subseteq D$ فإن B يشكل مثالي في D ومنه فإن D/B تشكل جبراً

$\forall \bar{a} \in \bar{D} \subseteq A/B \Longrightarrow \bar{a} = a + B \; ; \; a \in A \longrightarrow a \in D$

$\longrightarrow \bar{a} \in D/B \longrightarrow \boxed{\bar{D} \subseteq D/B}$

$\forall x + B \in D/B \; ; \; x \in D$

بما أن $x \in D \subseteq A \longrightarrow x + B \in A/B \;\&\; x + B \in \bar{D} \longrightarrow \boxed{D/B \subseteq \bar{D}}$

ومنه: $\boxed{\bar{D} = D/B}$

طلاب الرياضيات